

# APPROFONDIMENTI E INTEGRAZIONI AL CAPITOLO VII

## SATELLITI. GMDSS. COSTELLAZIONE GPS.

### GPS - PARTE II APPROFONDIMENTI MATEMATICI

#### 9. PRINCIPI GEOMETRICI E MATEMATICI.

Il principio geometrico del sistema è stato già detto: il punto nave è il punto comune di tre superfici sferiche.

Per seguire i relativi calcoli matematici il lettore deve tener presente che operando con le figure dello spazio è opportuno che le coordinate geografiche  $\varphi, \lambda$  lascino il posto alle corrispondenti coordinate cartesiane  $x, y, z$ ; salvo poi, alla fine dei calcoli, ritrasformare le cartesiane in geografiche.

Il centro  $C$  della Terra è l'origine degli assi; l'asse  $x$  passa per il piede del meridiano di Greenwich, l'asse  $y$  sull'equatore, a  $90^\circ$  da  $x$ , in senso antiorario; l'asse  $z$  è lungo la congiungente  $C - P_N$ , verso lo zenit (+) del polo nord.

Sia  $O$  (v. fig. 28 Tav. 11) la posizione incognita del ricevitore. Indichiamo con  $\varphi_0, \lambda_0$  e con  $X, Y, Z$  le sue coordinate geografiche e cartesiane. Il raggio  $\rho$  (da  $C$  ad  $O$ ) è la somma del raggio terrestre  $R_T$ , con la quota  $Q$ :

$$\rho = R_T + Q$$

TAVOLA 11

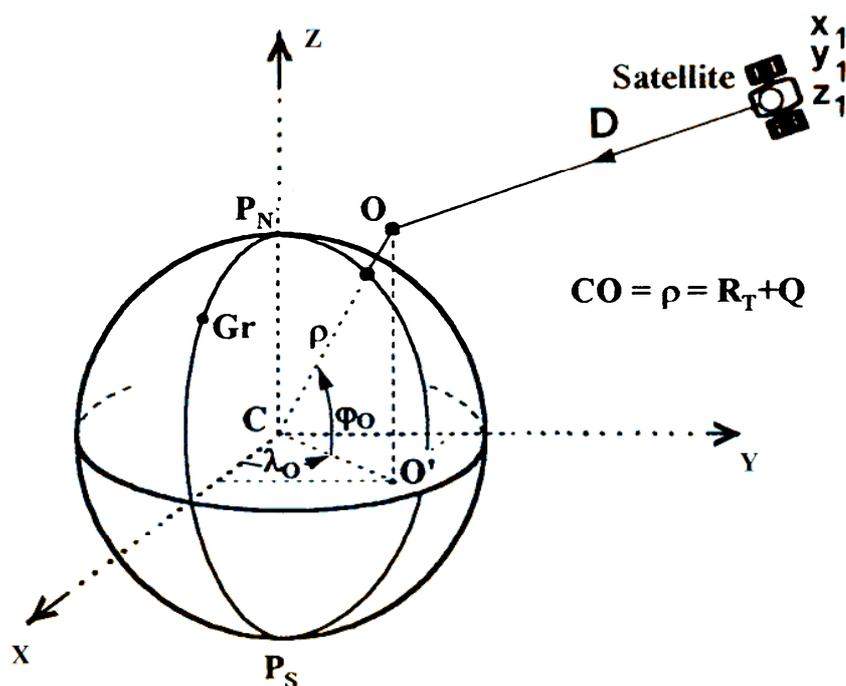


Fig. 28 Assi cartesiani e posizione relativa del satellite e del ricevitore.

Le formule di trasformazione sono:

$$\begin{aligned}
 X &= \rho \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \lambda_0 & \rho &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} & Q &= \rho - R_T \\
 Y &= \rho \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin \lambda_0 \\
 Z &= \rho \sin \varphi_0 & \sin \varphi_0 &= \frac{Z}{\rho} & \operatorname{tg} \lambda_0 &= \frac{Y}{X}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Per dare a  $\lambda$  il campo di variabilità da  $0^\circ$  a  $\pm 180^\circ$  è opportuna la formula:

$$\cos \langle \lambda \rangle = \frac{X}{\left( |X| \sqrt{1 + \left( \frac{Y}{X} \right)^2} \right)} \quad \lambda = \langle \lambda \rangle \cdot \operatorname{SIGN} Y$$

Indichiamo con  $x_1$   $y_1$   $z_1$  le coordinate del satellite (satellite N° 1 del nostro discorso). La sua distanza  $D$  dal punto  $O$  del ricevitore è  $D_1 = c \cdot \Delta t_1$

Così come l'equazione della circonferenza nel piano è:  $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = D_1^2$  espressione che lega le coordinate correnti  $x$   $y$  con le coordinate del centro  $x_1$   $y_1$  lontano  $D_1$  dai punti della circonferenza, analogamente si ha l'equazione della superficie sferica (talvolta, per brevità, detta equazione della sfera) nello spazio:

$$(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 + (Z - z_1)^2 = D_1^2 \tag{13}$$

Per determinare le tre coordinate incognite  $X$   $Y$   $Z$ , che fissano la posizione del ricevitore  $O$ , occorrono almeno tre equazioni; quindi tre misure di distanza ("pseudo-range")  $D_1$   $D_2$   $D_3$  dai satelliti 1, 2, 3 sopra l'orizzonte di  $O$ .

Il sistema risolutivo è:

$$\left\{ \begin{aligned}
 (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 + (Z - z_1)^2 &= D_1^2 \\
 (X - x_2)^2 + (Y - y_2)^2 + (Z - z_2)^2 &= D_2^2 \\
 (X - x_3)^2 + (Y - y_3)^2 + (Z - z_3)^2 &= D_3^2
 \end{aligned} \right. \tag{14}$$

Un sistema con tre incognite e tre equazioni di 2° grado ha una risoluzione complessa. Per dare al lettore una informazione matematica esauriente sull'argomento indichiamo una soluzione più semplice che si ottiene linearizzando le equazioni.

Supponiamo, in un primo momento, di ricercare la posizione di  $O$  sulla superficie marina ( $\rho = R_T = R$ ). Tale superficie ha equazione (scrivendo  $R = R_T$ ):

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 \tag{15}$$

Anche la (15) è l'equazione di un luogo di posizione della nave.

L'intersezione di ognuna delle superfici sferiche delle (14) con la superficie terrestre (15) avviene lungo una circonferenza che abbiamo già considerato nelle figure 23 e 24. Questa circonferenza  $A - B$  (v. Tav. 12) è l'effettivo luogo di posizione della nave.

Tavola 12 Principio geometrico del GPS.

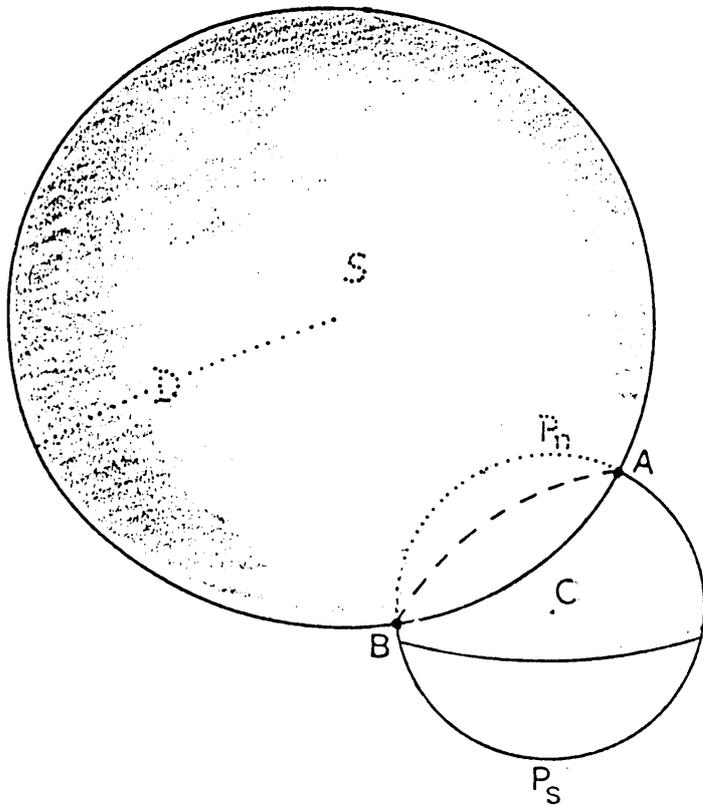


Fig. 29  
Sfera del satellite e sfera terrestre: circonferenza AB l. di p.

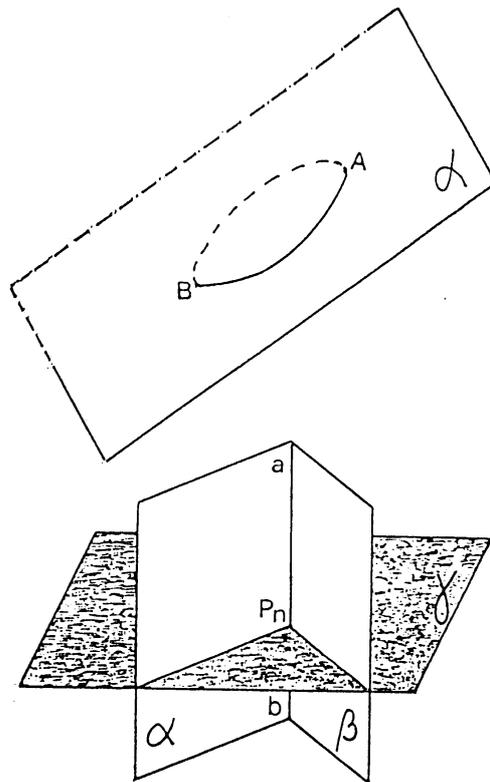


Fig. 30  
 $\alpha$  è il piano contenente il luogo di posizione (l. di p.).

Fig. 31  
Tre piani radicali (contenenti i tre l. di p.) s'incontrano in  $P_N$ .

Consideriamo il piano  $\alpha$  che contiene tale effettivo luogo di posizione. L'equazione di questo piano - piano radicale - si ottiene sviluppando prima i quadrati di una delle tre equazioni (ad esempio la prima) componenti il sistema (14):

$$X^2 - 2 x_1 X + x_1^2 + Y^2 - 2 y_1 Y + y_1^2 + Z^2 - 2 z_1 Z + z_1^2 = D_1^2$$

e poi operando la sottrazione, membro a membro, con l'equazione (15) si ottiene, dopo qualche passaggio:

$$x_1 X + y_1 Y + z_1 Z = 0,5 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - D_1^2 + R^2)$$

Indicando con  $A'$  il secondo membro, noto, sopra ottenuto; ed inoltre indicando con  $B'$  e  $C'$  i secondi membri ottenibili con le altre due equazioni del sistema (14) a cui si sottrae la (15), si può comporre il sistema risolutivo dei tre piani radicali.

$$\begin{cases} x_1 X + y_1 Y + z_1 Z = A' \\ x_2 X + y_2 Y + z_2 Z = B' \\ x_3 X + y_3 Y + z_3 Z = C' \end{cases} \quad (16)$$

Il punto d'intersezione dei tre piani radicali, denominati in figura 31 con  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , è il punto nave 0 ricercato.

Per ricavare  $X$   $Y$   $Z$  di tale punto, oltre ai noti sistemi di sostituzione, è utile richiamare il calcolo di una matrice, calcolo che chiama alla memoria la nota regola di Kramer. Il determinante  $\Delta$  dei tre denominatori delle espressioni finali di  $x$   $y$   $z$  è:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ x_2 y_2 z_2 \\ x_3 y_3 z_3 \end{vmatrix} \quad (17)$$

Mentre i determinanti a numeratore delle espressioni finali di  $X$   $Y$   $Z$  sono  $\Delta x$   $\Delta y$   $\Delta z$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} A' y_1 z_1 \\ B' y_2 z_2 \\ C' y_3 z_3 \end{vmatrix} \quad \Delta y = \begin{vmatrix} x_1 A' z_1 \\ x_2 B' z_2 \\ x_3 C' z_3 \end{vmatrix} \quad \Delta z = \begin{vmatrix} x_1 y_1 A' \\ x_2 y_2 B' \\ x_3 y_3 C' \end{vmatrix} \quad (18)$$

Pertanto:

$$X = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad Y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad Z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Ricordiamo una delle regole di risoluzione di una matrice; consideriamo  $\Delta$  (17)

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ x_2 y_2 z_2 \\ x_3 y_3 z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 z_2 \\ y_3 z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 z_1 \\ y_3 z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = x_1 (y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2 (y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_3 (y_1 z_2 - y_2 z_1)$$

Dopo aver calcolato  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  si calcolano  $\phi$ ,  $\lambda$  con le relazioni di trasformazione riportate all'inizio di questo paragrafo.

Le coordinate dell'aereo. Per determinare le coordinate di un aereo si considerano i piani radicali non più ottenuti dall'intersezione di ogni sfera con la superficie terrestre (questa non è più, ovviamente, luogo di posizione dell'aereo) ma i piani ottenuti dalla intersezione di una superficie sferica (ad esempio la prima, di raggio  $D_1$ ) con tutte le altre tre. Occorrono pertanto quattro misure:  $D_1$   $D_2$   $D_3$   $D_4$ . La risoluzione del sistema composto di tre equazioni lineari conduce all'individuazione di  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ; in virtù delle formule di trasformazione (11) si scoprono:  $\phi$ ,  $\lambda$ ,  $Q$  (quota).

## 10. ERRORE SISTEMATICO NEL TEMPO: SCOPERTA E SINCRONIZZAZIONE.

Gli orologi di non elevata precisione presenti nei ricevitori di bordo costringono ad individuare l'errore sistematico  $\varepsilon_{\mu s}$  (errore in microsecondi) negli intervalli  $\Delta t$  misurati. Sapendo che  $c = 300 \text{ m}/\mu\text{s}$  un errore di  $1 \mu\text{s}$  comporterebbe un errore  $\varepsilon$  nella misura della distanza pari a 300 metri.

Vediamo ora come sia possibile scoprire la corrispondente correzione "e" ( $e = -\varepsilon$ ) e conseguentemente la correzione dell'orologio del ricevitore:  $e_{\mu s} = e : c$ .

La correzione "e" assume ora il significato di quarta incognita, dopo X, Y, Z.

Le equazioni delle superfici sferiche, luoghi di posizione nello spazio, assumono ora il seguente aspetto formale:

$$\begin{aligned} 1^a \text{ equazione: } & (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 + (Z - z_1)^2 = (D_1 + e)^2 \\ 2^a \text{ equazione } & (X - x_2)^2 + (Y - y_2)^2 + (Z - z_2)^2 = (D_2 + e)^2 \\ 3^a \text{ equazione: } & \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \\ 4^a \text{ equazione: } & \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \\ 5^a \text{ equazione: } & \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \end{aligned} \quad (19)$$

Ogni membro ha "e". Il quadrato di e è eliminabile come viene eliminato ogni termine quadratico incognito del primo membro:  $X^2 \ Y^2 \ Z^2$ , cioè operando la differenza di una equazione con un'altra, ad esempio della 2<sup>a</sup> equazione con la 1<sup>a</sup>; la differenza della 3<sup>a</sup> con la 1<sup>a</sup>; della 4<sup>a</sup> con la 1<sup>a</sup>; infine della 5<sup>a</sup> con la 1<sup>a</sup>. Il sistema ha bisogno di quattro equazioni perché ora le incognite sono proprio quattro: X, Y, Z, e. Occorrono pertanto cinque satelliti, per cinque misure. Vediamo come si perviene alla prima equazione del sistema; dopo aver sviluppato i quadrati delle prime due equazioni sopra scritte:

$$\begin{aligned} X^2 - 2x_1 X + x_1^2 + Y^2 - 2y_1 Y + y_1^2 + Z^2 - 2z_1 Z + z_1^2 &= D_1^2 + 2eD_1 + e^2 \\ X^2 - 2x_2 X + x_2^2 + Y^2 - 2y_2 Y + y_2^2 + Z^2 - 2z_2 Z + z_2^2 &= D_2^2 + 2eD_2 + e^2 \end{aligned}$$

si sottrae membro a membro:

$$(x_2 - x_1) X + (y_2 - y_1) Y + (z_2 - z_1) Z + (D_2 - D_1) e = a$$

$$a \text{ è un termine noto e vale } \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2 - D_2^2 + D_1^2)$$

così via operando le altre suddette differenze. I valori iniziali  $D_1 \ D_2 \ D_3 \ D_4 \ D_5$ , non ancora corretti, si chiamano pseudo-range.

Calcolo matriciale. Il sistema di quattro equazioni con quattro incognite (x, y, z, e) è:

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1) X + (y_2 - y_1) Y + (z_2 - z_1) Z + (D_2 - D_1) e &= a \\ (x_3 - x_1) X + (y_3 - y_1) Y + (z_3 - z_1) Z + (D_3 - D_1) e &= b \\ (x_4 - x_1) X + (y_4 - y_1) Y + (z_4 - z_1) Z + (D_4 - D_1) e &= c \\ (x_5 - x_1) X + (y_5 - y_1) Y + (z_5 - z_1) Z + (D_5 - D_1) e &= d \end{aligned} \quad (20)$$

La risoluzione del sistema passa attraverso il calcolo della matrice che, per semplicità di scrittura, ponendo  $(x_2 - x_1) = A$  ;  $(y_2 - y_1) = B$  ;  $(z_2 - z_1) = C$   $(D_2 - D_1) = D$  ;  $(x_3 - x_1) = E$  ... possiamo scrivere così:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & L & M & N \\ O & P & Q & R \end{vmatrix} = \Delta \\ \Delta &= A \begin{vmatrix} F & G & H \\ L & M & N \\ P & Q & R \end{vmatrix} - E \begin{vmatrix} B & C & D \\ L & M & N \\ P & Q & R \end{vmatrix} + I \begin{vmatrix} B & C & D \\ F & G & H \\ P & Q & R \end{vmatrix} - O \begin{vmatrix} B & C & D \\ F & G & H \\ L & M & N \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\Delta = A \left\{ F \begin{vmatrix} M & N \\ Q & R \end{vmatrix} - L \begin{vmatrix} G & H \\ Q & R \end{vmatrix} + P \begin{vmatrix} G & H \\ M & N \end{vmatrix} \right\} - E \left\{ B \begin{vmatrix} M & N \\ Q & R \end{vmatrix} - L \begin{vmatrix} C & D \\ Q & R \end{vmatrix} + P \begin{vmatrix} C & D \\ M & N \end{vmatrix} \right\} + I \dots$$

$$\Delta = A \{F(MR - NR) - L(GR - HQ) + P(GN - HM)\} - E \dots$$

Dopo aver calcolato il determinante  $\Delta$  si passa al calcolo dei determinanti  $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \Delta_e$ . Vediamo l'espressione della matrice  $\Delta_x$ :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a & B & C & D \\ b & F & G & H \\ c & L & M & N \\ d & P & Q & R \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} F & G & H \\ L & M & N \\ P & Q & R \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} B & C & D \\ L & M & N \\ P & Q & R \end{vmatrix} + c \dots$$

Eccetera

$$X = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad Y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad Z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \quad e = \frac{\Delta_e}{\Delta}$$

**Nota.** Quando sussiste ridondanza d'informazioni per cui il numero delle equazioni è superiore a quello delle incognite, la posizione è individuata secondo la teoria dei minimi quadrati. Il ricevitore, grazie al calcolatore, calcola la distanza « $d_i$ » di un generico punto 0 ( $\varphi, \lambda$ ) dai vari piani radicali di posizione e ripete il calcolo fino a che non trova la posizione per cui la somma dei quadrati delle distanze ( $\sum d_i^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots$ ) risulta minima.

Esempi numerici (sulla sfera).

N° 1

HP: siano le coordinate dei satelliti per un dato istante

Sat 1	$\varphi = 47^\circ 56' 12''$ N	$\lambda = 41^\circ 40' 38''$ W
Sat 2	$\varphi = 42^\circ 08' 42''$ S	$\lambda = 131^\circ 53' 22''$ W
Sat 3	$\varphi = 38^\circ 51' 59''$ S	$\lambda = 58^\circ 12' 42''$ W

Le quote, rispettivamente: 26.539,0 Km; 26.540,0 Km; 26.541,0.

Le distanze "misurate" siano:

$$D_1 = 24.715,17414 \text{ Km} \quad D_2 = 23.305,55911 \text{ Km} \quad D_3 = 22.972,72421 \text{ Km}$$

Raggio terrestre = 6.371,024 Km

Calcolare le coordinate trirettangolari dei satelliti.

Calcolare le coordinate trirettangolari della nave.

Calcolare le coordinate sferiche della nave.

Il risultato è:  $\varphi = 1^\circ 00' 11''$  S  $\lambda = 93^\circ 59' 45''$  W

N° 2

Per un aereo sfruttando i tre satelliti dell'esempio N° 1 ed un quarto satellite.

Le distanze "misurate" siano:

$$D_1 = 24.713,16166 \text{ Km} \quad D_2 = 23.300,687 \text{ Km} \quad D_3 = 22.967,14773 \text{ Km}$$

$$D_4 = 25.084,8104 \text{ Km} \quad \text{dal Sat 4} \quad \varphi = 50^\circ 19' 53'' \text{ N} \quad \lambda = 150^\circ 10' 08'' \text{ W}$$

Calcolare  $\varphi, \lambda$  e altitudine dell'aereo.

Risultato:  $\varphi = 1^\circ$  Sud  $\lambda = 94^\circ$  W  $Q = 12,037$  Km

N° 3

Dai quattro satelliti degli esercizi N° 1 e N° 2 sono state determinate:

$$D_1 = 24.714,87414 \quad D_2 = 23.305,25911 \quad D_3 = 22.972,4242 \quad D_4 = 25.085,80058$$

(distanze in Km).  $D_5 = 20.190,33991$  Km dal Sat 5 ( $\varphi = 0^\circ$ ;  $\lambda = 90^\circ$  W;  $Q = 26.540$  Km).

Calcolare le coordinate trirettangolari, geografiche e la correzione e costante.

Risultati:

$X = -444,3520214$        $Y = -6.354,530382$        $Z = -111,1896826$

da cui si ricava  $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 6.371,017834$  Km e con le formule di trasformazione:

Pn:  $p = 1^\circ 00' S$        $\lambda = 94^\circ 00' W$  (con qualche secondo di arrotondamento). La correzione “e” risulta 0,279 Km (279 metri);  $\varepsilon = 0.93 \mu s$ .

## 11. IL RICEVITORE.

Un ricevitore GPS comprende quattro parti fondamentali:

1) antenna, 2) ricevitore vero e proprio, 3) calcolatore, 4) tastiera e video.

La figura 32 fa vedere, nel circuito a blocchi, i vari passaggi che si sviluppano, in linea generale, dall'acquisizione dei segnali alle misure di distanza ed infine al calcolo della posizione. L'antenna è in grado di ricevere i segnali provenienti da satelliti aventi elevazione maggiore di  $5^\circ$ . L'antenna è polarizzata e schermata inferiormente per evitare di ricevere il segnale riflesso dalla superficie (marina o altra) che sarebbe fonte di errore nella successiva misura dell'intervallo di tempo.

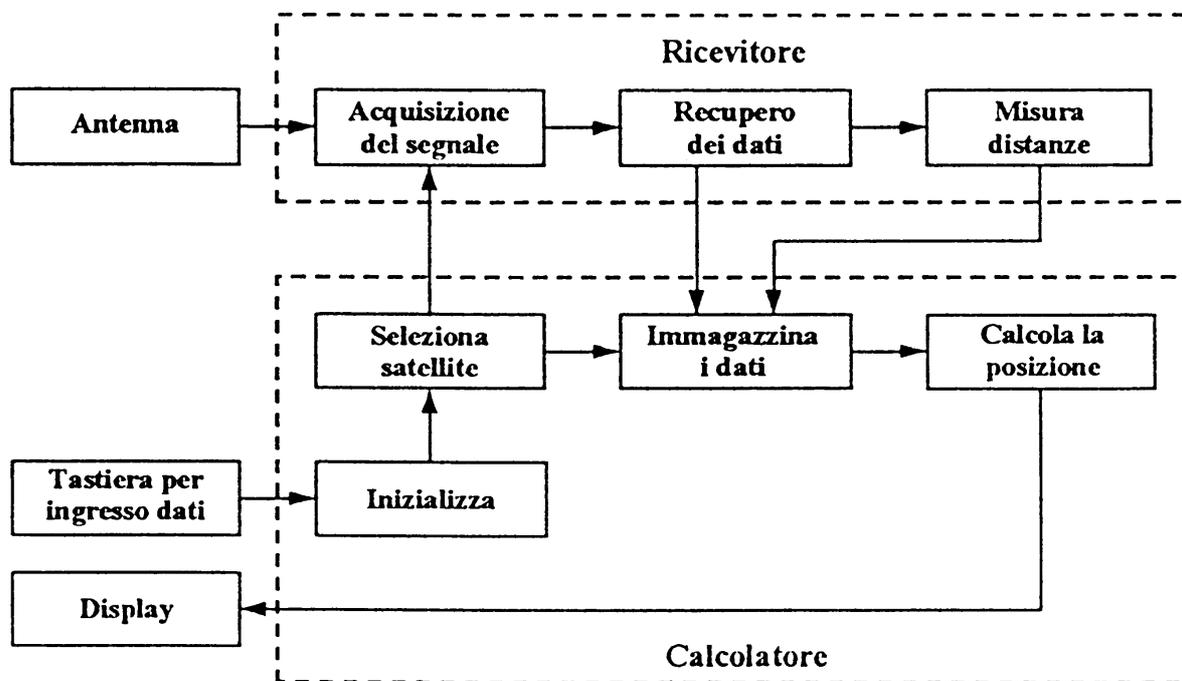


Fig. 32 Schema a blocchi di un ricevitore satellitare GPS.

Vi sono tre tipi di ricevitore: a) sequenziali, b) multicanali, c) paralleli.

I ricevitori sequenziali hanno un solo canale con cui vengono ricevuti i segnali dai satelliti in sequenza, cioè uno per volta, in un intervallo che oscilla intorno ad 1,5 secondi. Sono quelli delle navi mercantili, i più economici, chiamati anche ricevitori a “bassa dinamica”. I ricevitori multicanali hanno da 4 a 6 canali che ricevono contemporaneamente un ugual numero di satelliti: ogni canale “aggancia” un satellite. Sono i più costosi e sono usati dalle navi militari. Sono denominati ricevitori ad “alta dinamica”. Quelli in parallelo, o “multiplexed”, hanno un solo canale, ma una scansione tanto rapida che la ricezione sequenziale dei segnali dei satelliti avviene in 20ms. I segnali ricevuti dovranno essere demodulati.

## 12. CAUSE DI ERRORE.

Le principali cause di errore sono:

- 1) Una lievissima instabilità della frequenza standard o di riferimento degli orologi del satellite: “off-set”. Inoltre una non perfetta compensazione dell’effetto relativistico e gravitazionale.
- 2) Una piccolissima incertezza dei parametri orbitali.
- 3) Imperfetta compensazione dei ritardi ionosferico e troposferico.
- 4) Rumore del ricevitore e risoluzione del multicanale.
- 5) Sistema di riferimento.

Cominciamo dalla prima causa elencata.

1') Gli orologi atomici dei satelliti sono soggetti all’effetto relativistico ed il GPS è un esempio pratico della teoria speciale e generale della relatività di Einstein. A causa della velocità relativa tra l’orologio del satellite e quello della Terra, il primo sembra che vada più piano, nel monitor, e quindi che abbia una frequenza più bassa rispetto a quella dell’orologio terrestre.

Indicando con  $\delta t_m$  lo stesso intervallo misurato in un certo punto del sistema “mobile”, (ad es. il satellite), indicando con  $\delta t_t$  lo stesso intervallo misurato nel sistema “fisso” (ad es., per ipotesi, la Terra),  $\delta t_t$  appare più lungo o, come si dice anche, dilatato del fattore  $1 : \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$  dove  $v$  è la velocità relativa tra osservatore e satellite.

Un altro effetto, di segno opposto, è che gli orologi sono più veloci in campo di bassa gravità. I due effetti si elidrebbero a vicenda se il satellite orbitasse ad una distanza dal centro della Terra pari a 1,5 volte il raggio terrestre. Alla distanza  $(Z + R)$  26.540 Km gli orologi dei satelliti slitterebbero, se non fossero corretti, di 38 microsecondi. Buona risulta essere la compensazione.

2') Le cause di variazione dei parametri orbitali sono: precessione del piano orbitale; variabilità delle forze gravitazionali da parte del Sole, Luna, pianeti; irregolarità del campo gravitazionale terrestre; pressione del vento solare durante le tempeste magnetiche provocate dalle esplosioni solari (il flusso dei fotoni esercita una pressione tale da far abbassare di 200 ÷ 400 metri la quota del satellite); variabilità del campo magnetico terrestre; forze elettrostatiche ed elettromagnetiche causate dalle interazioni tra le parti del satellite. Le effemeridi del satellite, trasmesse agli utilizzatori, non potranno essere perfette ma sono comunque molto precise.

3') L’atmosfera e la ionosfera in particolare curvano, sia pur lievemente, la traiettoria di propagazione delle r. o.; si allunga leggermente il percorso rispetto a quello “rettilineo”; si parla pertanto di ritardi. L’imperfetta compensazione di tale variante è dovuta alla mutabilità dei ritardi, in particolare del ritardo ionosferico perché l’intensità di ionizzazione è variabile con continuità di ora in ora. L’incertezza, minima peraltro, del percorso troposferico è dovuta alla variazione dell’indice di rifrazione dell’atmosfera. L’impiego di due frequenze, che subiscono due differenti ritardi, permette una discreta compensazione. L’allungamento di percorso, durante il giorno, si aggira intorno ai 20, 30 metri; più ridotto è durante la notte: da 3 a 6 metri.

4') Sono denominati errori multi percorso (*multipath*) quelli causati dalla ricezione diretta e riflessa dei segnali del satellite, specialmente quando il satellite ha poca elevazione. Errori di questo tipo sono dell’ordine di 2 o 3 metri, comunque rari, grazie alla polarizzazione dell’antenna.

5') L’ellissoide di riferimento del GPS è noto con la sigla WGS-84 che differisce dal sistema WGS-72 di molto poco. Nel WGS-84  $a = m\ 6378135$ ;  $b = m\ 6356752$ . Le carte italiane costruite dopo il 1970 sono riferite al sistema geodetico ED-50 (European Datum 1950) basato sull’Ellissoide Internazionale del 1924. In esse lo scarto non supera 150 metri. Tuttavia le carte riportano normalmente l’ellissoide di riferimento e le correzioni  $\Delta\phi$  e  $\Delta\lambda$  da applicare alle coordinate GPS prima di riportarle sulla carta. Gli ultimi GPS, in grado di avere l’*input* sigla ellissoide, danno  $\phi_N$   $\lambda_N$  per la carta nautica.

### 13. GEOMETRIA DEL SISTEMA. ERRORI ACCIDENTALI.

Ogni volta che si sperimenta un nuovo strumento di misura si va alla ricerca degli errori e delle cause di errore. Com'è noto, gli errori accidentali, e la loro origine, sono più difficilmente individuabili rispetto a quelli sistematici. Lo studio degli errori (accidentali) appartiene alla teoria di Gauss i cui capisaldi sono:

- 1) gli errori possono essere, con uguale probabilità, positivi o negativi.
- 2) gli errori piccoli sono più frequenti di quelli più grandi.
- 3) quando si ha un gran numero  $n$  di misure accurate ( $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ) di una stessa grandezza incognita  $X$ , il valore più probabile di questa grandezza (in assenza di errori sistematici) è la media aritmetica  $X_m$  delle misure stesse (Postulato di Gauss); il limite di  $X_m$  per  $n \rightarrow \infty$  è il valore esatto  $X$ .
- 4) Lo scarto quadratico medio  $\sigma$  (dagli americani chiamato RMS cioè *Root Mean Square*) è determinabile con la formula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(X_1 - X_m)^2 + (X_2 - X_m)^2 + (X_3 - X_m)^2 + \dots}{n}} \quad (11)$$

Le cause di errore sono quelle menzionate nel § 12.

Esse risiedono nei cosiddetti tre segmenti: spazio, controllo, utilizzatore. Il totale degli errori mediamente si aggira sul valore di m 37,2.

L'esame degli errori secondo una normale distribuzione gaussiana (per tale studio rimandiamo il lettore interessato alla bibliografia) permette di arrivare alle seguenti conclusioni: nel 95% dei casi l'errore totale  $2\sigma$  è m 13 per il GPS con due frequenze (PPS);  $2\sigma$  è m 23 nel GPS con una sola frequenza (SPS con sola C/A).

Vediamo ora come si riflettono questi errori nel luogo di posizione ed infine nel punto nave  $P_N$ .

Fattore sferico di elevazione. L'errore totale  $2\sigma$  va moltiplicato per un fattore "f" denominato "**fattore sferico di elevazione**" ( $f > 1$ ) che è uguale a  $\sec h$  ( $f = \sec h$ ), ove  $h$  è l'angolo di elevazione dei satellite rispetto al piano orizzontale.

La figura 33 della Tavola 13 fa vedere che per un dato errore  $2\sigma$  nella misura della distanza  $D$  del ricevitore dal satellite, l'arco sferico di cui si sposta la circonferenza tratteggiata (luogo di posizione) è  $AA'$  per un osservatore in  $A'$ , per il quale il satellite è elevato dell'angolo di altezza  $h$  rispetto al piano orizzontale. Tale arco è minore (minore pertanto è l'errore del luogo di posizione) per l'osservatore in  $A''$  per il quale il satellite è meno elevato rispetto all'orizzonte. Dalla figura si ricava, con accettabile approssimazione, la relazione  $2\sigma = AA' \cdot \cos h$  da cui:  $AA' = 2\sigma \cdot \sec h$ . Indicando  $AA'$  con  $y$  ( $y$  è l'errore sul luogo di posizione) si ha:

$$y = 2\sigma \cdot \sec h \quad (22)$$

Esempi: per  $2\sigma = 23$  m e  $h = 70^\circ$  ( $\sec 70^\circ = 2,9$ ), risulta  $y =$  m 66,7  
 per  $2\sigma = 23$  m e  $h' = 25^\circ$  ( $\sec 25^\circ = 1,1$ ), risulta  $y' =$  m 25,3

Si considera poi la doppia striscia di posizione (doppia, come è noto per la probabilità degli errori accidentali di presentarsi positivi o negativi). La nave è in un punto di tale parallelogramma di certezza; il punto più lontano da  $P_N$  - assunto come punto nave - è all'estremità  $N$  della semidiagonale maggiore (v. fig. 35) dove ancora potrebbe essere la nave. L'errore  $e_n$  del punto è dato dall'espressione del teorema di Carnot:

$$e_n = \frac{\sqrt{y^2 + y'^2 + 2|y \cdot y' \cdot \cos \delta|}}{\sin \delta} \quad (23) \quad \text{con} \quad \begin{cases} y = 2\sigma \cdot \sec h \\ y' = 2\sigma \cdot \sec h' \end{cases}$$

Tavola 13 La qualità del punto nave.

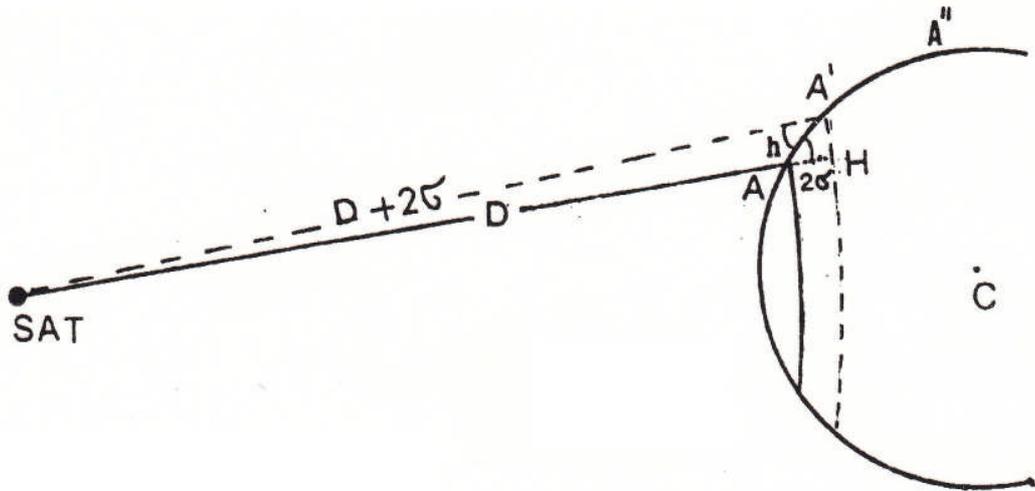


Fig. 33 Fattore sferico di elevazione:  $f = \sec h$ ;  $2\sigma$  errore nella misura;  $y$ , errore del luogo di posizione:  $y = 2\sigma \cdot f$ .

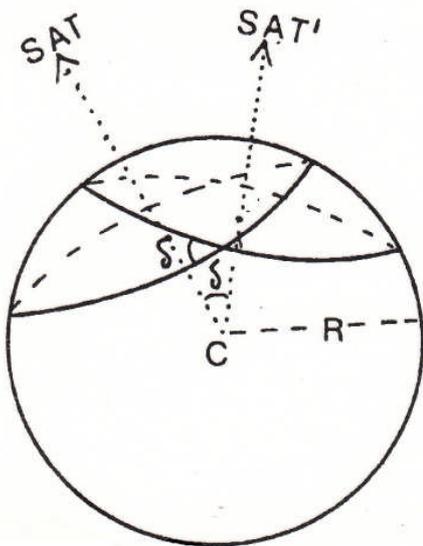


Fig. 34 Differenza d'azimut  $\delta$  tra i satelliti.

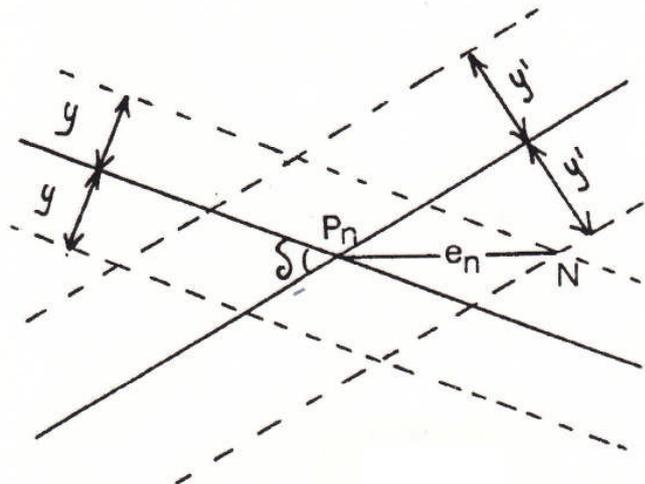


Fig. 35 Striscia di posizione ed errore  $e_n$  del  $P_N$ .

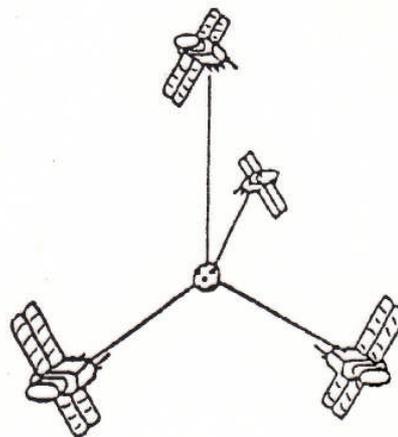
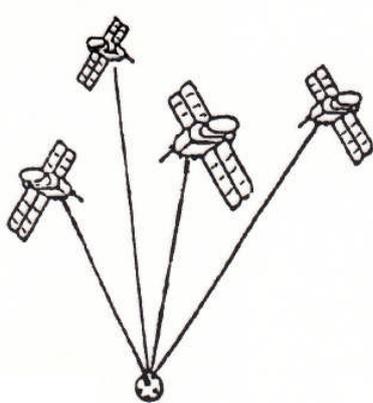


Fig. 36 Qualità di  $P_N$ :  $HDOP = e_n/2\sigma$ : cattivo il primo, ottimo il secondo.

$\delta$  è l'angolo d'intersezione delle due circonferenze (v. fig. 34); è anche l'angolo differenza d'azimut tra le due direzioni sub-satellitari. Quanto più prossimo a  $90^\circ$  è l'angolo  $\delta$ , tanto minore è l'errore  $e_n$  del punto nave.

Esempi:

$$\begin{aligned} h &= 66^\circ 42'; & f &= \sec h = 2,5; & 2\sigma &= m 13; & y &= m 32,5 \\ h' &= 24^\circ 37'; & f' &= \sec h' = 1,1; & 2\sigma &= m 13; & y' &= m 14,3 \\ \delta &= 90^\circ; & e_n &= m 36 \\ \delta &= 30^\circ; & e_n &= m 91 \end{aligned}$$

Si può mettere in relazione  $e_n$  e  $2\sigma$  mediante il loro rapporto. Osservando l'espressione del teorema di Carnot si ricava:

$$\frac{e_n}{2} = \frac{\sqrt{f^2 + f'^2 + 2 \cdot f \cdot f' \cdot |\cos|}}{\text{sen}} = \text{H-DOP} \quad (24)$$

H-DOP è il simbolo di  $\frac{e_n}{2\sigma}$  usato dagli statunitensi e sottintende la componente orizzontale di G-DOP nello spazio. G-DOP è la sigla di "Geometric - Dilution Of Position".

La geometria del sistema, in merito alla distribuzione dei satelliti (v. figure 34 e 36) è giudicata, sulle navi, in base al valore di H-DOP.

Un valore di H - DOP < 3 è considerato buono, mentre un H-DOP > 3 è significativo di una cattiva geometria.

Osservando la schermata (v. fig. 37) dell'indicatore del GPS si nota che l'ultimo dato riporta il valore di H-DOP.

Considerando  $2\sigma$  (il doppio dello scarto quadratico medio  $\sigma$ ) = 23 metri, per ricevitore GPS con una sola frequenza, si ha la possibilità di calcolare  $e_n$ :

$$e_n = (\text{H-DOP}) \cdot 2\sigma \quad (25)$$

Si legga, a proposito, l'ultima riga della schermata della figura 37 della Tavola 14 (H-DOP = 1,9); risulta:  $e_n = 23 \cdot 1,9$ ;  $e_n = m 43,7$ .

Il probabile errore circolare, riferito al punto nave, è indicato genericamente con CEP - % (Circular Error Probable). Quando si dice che il CEP - 50% è, ad esempio, m 40 s'intende dire che un cerchio avente un raggio di 40 metri contiene il 50% dei punti nave.